

# KURZUSINFORMÁCIÓ

ANALÍZIS I, PMB1105

2014 TAVASZ

**Tantárgy neve:** Analízis I

**Tantárgy kódja:** PMB1105

**Kreditpont:** 4

**Heti kontakt óraszám (elm.+gyak.):** 2+2

**Előfeltétel:** nincs

**Félévi követelmény:** kollokvium

## Előadás

**Halmazok** Alapvető fogalmak, halmazműveleti tulajdonságok, halmazrendszerek

**Relációk** Rendezett pár, Descartes-szorzat, reláció értelmezési tartománya és értékkészlete, összetett és inverz reláció

**Függvények** Függvény fogalma, halmazok képe és ősképe, összetett és inverz függvény, valós függvények tulajdonságai, elemi függvények

**Valós számok** A valós számok axiómarendszere, egyenlőtlenségek, halmazok számossága, a valós számok metrikus tulajdonságai (környezet, torlódási pont, nyílt halmazok)

**Számsorozatok** Monotonitás, korlátosság, konvergencia, részsorozatok, tagabb értelemben vett konvergencia, Cauchy sorozat, nevezetes sorozatok, az  $e$  szám fogalma, határérték és műveletek, Rendőr-elv, további érdekes határértékek

**Végtelen sorok** A sor fogalma, mértani sorok, további kiszámítható sorok, abszolút és feltételesen konvergens sorok, sorok átrendezhetősége, konvergencia kritériumok, hatványsorok konvergencia tartománya

**Függvények folytonossága** Átviteli elv, elemi függvények folytonossága, szakadási helyek, függvények határértéke, határérték a végtelenben, egyenletes folytonosság, zárt intervallumon értelmezett folytonos függvények tulajdonságai

## Gyakorlat

A gyakorlaton az előadáshoz kapcsolódó feladatok megoldására kerül sor, különös tekintettel a következő típusokra:

- Halmazok elemeinek meghatározása,
- Halmazegyenlőség bizonyítása,
- Relációk, ill. értelmezési tartományának, értékkészletének és inverzének meghatározása,
- Összetett relációk meghatározása,
- Inverzfüggvények meghatározása,
- Halmazok függvény szerinti képe és ősképe,
- Függvények elemi ábrázolása, és tulajdonságainak megadása
- Egyenlőtlenségek megoldása,
- Sorozatok tulajdonságainak vizsgálata,
- Határértékszámítás,
- Mértani sorok kiszámítása, egyéb sorok összege,
- Konvergencia kritériumok használata,
- Hatványsorok konvergencia tartományának keresése,
- Függvény határértékének keresése pontban és a végtelenben.

## Számonkérés, értékelés

A teljes évfolyam egy időben két zárthelyi dolgozatot ír a gyakorlati foglalkozásokon tanult ismeretekből. Ezekből 20 – 20 pont szerezhető be. A zárthelyi dolgozatok megírására előadási időpontokon kerül sor, az első a szorgalmi időszak közepén, a második a szorgalmi időszak végén. A pontos dátumokat a gyakorlatvezetők vagy a kurzus előadója hirdeti ki legalább két héttel a dolgozatírás előtt. Lehetőség van gyakorlaton további 10 pont megszerzésére, ennek módja a gyakorlatvezetők kompetenciája. Szorgalmi időszakban tehát legfeljebb 50 pontot lehet elérni. A vizsgára bocsátás feltétele ebből 20 pont megszerzése. Tehát, az a hallgató, aki a két zárthelyi dolgozatból és a gyakorlaton szerzett plusz pontokból összesen nem éri el a 20 pontot, elégtelenül kap és nem mehet vizsgázni.

Vizsgán további 50 pontot lehet elérni. A vizsgaidőpontokat a kurzus előadója hirdeti ki a Neptun tanulmányi rendszeren keresztül és csak azok a hallgatók vizsgázhatnak, akik teljesítették a vizsgára bocsátás feltételét és feliratkoztak az adott időpontra. A gyakorlaton és a vizsgán szerzett pontok összegéből jön össze a félév eredménye a következő táblázat szerint

0 – 44	→ elégtelen
45 – 54	→ elégséges
55 – 69	→ közepes
70 – 84	→ jó
85 – 100	→ jeles

Elégtelen vizsgát még kétszer lehet megismételni, ekkor a gyakorlaton szerzett pontok száma nem változik.

## A számonkérések szerkezete

Egy 20 pontos zárthelyi dolgozat 5 különálló feladatból áll a gyakorlati foglalkozásokon tanult ismeretekből.

Az 50 pontos vizsga szerkezete a következő

1. 5 igaz-hamis állításból álló teszt (10 pont)
2. 4 definíció vagy tétel kimondása (20 pont)
3. 3 feladat (20 pont)

Olyan definíciót vagy tételt kell tudni kimondani, melyek az előadásokon hangzott el. Hasonlóan, a feladatok is a gyakorlati foglalkozásokon tanult ismeretekből kerülhetnek ki.

## Rendelkezésre álló segédanyagok

- [1] Toledo Rodolfo – Rozgonyi Tibor, *Analízis I*, Főiskolai jegyzet, Nyíregyháza, 2011.
- [2] Az előadások prezentációja:  
[http://zeus.nyf.hu/toledo/hun/education/anyagok/anal1/analisis1\\_PTI\\_p.pdf](http://zeus.nyf.hu/toledo/hun/education/anyagok/anal1/analisis1_PTI_p.pdf)
- [3] Feladatsor:  
<http://zeus.nyf.hu/toledo/hun/education/anyagok/anal1/FeladatsorAnalisisI.pdf>

Név: \_\_\_\_\_  
 Neptunkód: \_\_\_\_\_  
 Gyakorlatvezető: \_\_\_\_\_

1. A halmazműveleti tulajdonságok felhasználásával igazolja, hogy

4 pont

$$(A \setminus B) \cup C = ((A \cup C) \setminus B) \cup (B \cap C)$$

2. Legyen

3 pont

$$A = \{-3, -2, -1, 0, 5\},$$

$$B = \{-2, -1, 1, 2\}.$$

Határozzuk meg az alábbi  $A, B$  halmazpáron értelmezett  $\varrho$  relációk értelmezési tartományát, értékkészletét és inverzét, ha  $a\varrho b$  akkor is csak akkor, ha  $b^2 < a$ .

3. Legyen  $A = \{-1, 0, 2\}$ ,  $B = [-1, 3[$ , továbbá

4 pont

$$f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}, \quad f(x) = |x - 1| - 1,$$

Adjuk meg a halmazok függvény szerinti képét és ősképet!

4. Legyen  $A := \{1, 2, 3, 4, 5\}$ , valamint  $\varrho$  és  $\sigma$  az  $A$  halmazon értelmezett reláció úgy, hogy

3 pont

$$\varrho := \{(1, 1), (1, 4), (2, 3), (3, 4), (4, 5)\}$$

$$\sigma := \{(1, 3), (2, 1), (2, 4), (3, 4), (3, 5)\}.$$

Adjuk meg a  $\sigma^{-1} \circ \varrho$  reláció elemeit!

5. Ábrázolja a következő függvényt!

6 pont

$$f(x) = |2x + 3| - |x - 1|, \quad (x \in \mathbf{R})$$

Az ábra alapján írja le az  $f$  függvény tulajdonságait, illetve oldja meg a következő egyenlőtlenséget

$$|2x + 3| - |x - 1| < 2$$

Név: \_\_\_\_\_  
 Neptunkód: \_\_\_\_\_  
 Gyakorlatvezető: \_\_\_\_\_

1. Vizsgáljuk meg monotonitását, korlátosságát és konvergencia szempontjából a következő sorozatot! Ha konvergens számítsuk ki  $\varepsilon = 10^{-3}$ -hez tartozó küszöbindexet!

4 pont

$$a_n = \frac{3n-1}{n+2}$$

2. Határozzuk meg a következő határértékét!

4 pont

$$a) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n - \sqrt{n^2 - n}}{n^2 + 2}, \quad b) \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{n+1}{n-3} \right)^{2n-5}.$$

3. Döntsük el, hogy konvergensek-e az alábbi sorok!

4 pont

$$a) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{3n+1}{n+4}, \quad b) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{2^n}.$$

4. Adjuk meg a következő hatványsor konvergenciatartományát!

4 pont

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n n^2 (x-2)^n$$

5. Határozzuk meg a következő határértékét!

4 pont

$$a) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{2x^2 - 3x + 1}{x^2 - 1}, \quad b) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x}{\sin x}.$$

## Analízis I vizsga

## PTI MINTA

Név: \_\_\_\_\_  
Neptunkód: \_\_\_\_\_

1. Állapítsa meg, hogy a következő állítások közül melyek igazak és melyek hamisak! 10 pont

- Legyen  $A = \{1, \{2\}\}$ . Ekkor  $1 \in A$  és  $2 \in A$ .
- Az egész számok és a racionális számok számossága megegyezik.
- Minden korlátos számsorozatnak van határértéke.
- Ha egy sor általános tagja tart nullához, akkor a sor konvergens.
- Minden harmadfokú polinomnak van zérushelye.

2. Adja meg a következő tételeket és fogalmakat! 20 pont

- a függvény fogalma,
- a sorozat határértékének fogalma,
- a Rendőr-elv.
- a Cauchy-féle konvergencia kritérium sorozatokra.

3. Legyen  $A := \{1, 2, 3, 4, 5\}$ , valamint  $\varrho$  és  $\sigma$  az  $A$  halmazon értelmezett reláció úgy, hogy 5 pont

$$\begin{aligned}\varrho &:= \{(1, 2), (1, 4), (2, 2), (3, 4), (4, 5)\} \\ \sigma &:= \{(1, 1), (1, 3), (3, 2), (5, 4)\}.\end{aligned}$$

Adjuk meg a  $\varrho^2 \circ \sigma$  reláció elemeit!

4. Vizsgáljuk meg monotonitás, korlátosság és konvergencia szempontjából a következő sorozatot! Ha konvergens, számítsuk ki  $\varepsilon = 10^{-3}$ -hoz tartozó küszöbindeket! 6 pont

$$a_n := \frac{n-1}{2n+3}$$

5. Határozza meg a következő határértékeket! 9 pont

$$a) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n^2 + n} + 2n}{2 + \sqrt{n^2 + 1}}, \quad b) \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{2n+3}{2n-1} \right)^{n-3}, \quad c) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{2x^2 + 3x - 5}{x^2 - 1}.$$